

# BASES FÍSICO-MATEMÁTICAS DEL VUELO MECÁNICO

*Lic. Luis Félix Jordán Delgado*

## RESUMEN

*El vuelo mecánico se plasma en el vuelo de un avión. ¿Y por qué vuela un avión?. La respuesta a esta pregunta es uno de los retos más fascinantes. Sobre este tema la mayoría de los textos de enseñanza y de divulgación, cuando dan respuesta a la pregunta, emplean explicaciones erróneas o las menos contradictorias; esto ha generado una serie de preconceptos muy arraigados entre ingenieros técnicos y pilotos que son la causa de polémicas verbales y escritas. Sobre este tema trataremos de dar una idea conceptual aproximada sobre los principios físicos y matemáticos implicados en el vuelo de un avión.*

## 1. LAS FUERZAS ORIGINADAS POR LOS FLUIDOS

El avión, helicóptero, autogiro, dirigible y globo aerostático son vehículos que están rodeados por el aire, entendiendo el aire como un fluido, mientras ellos están en movimiento. Todos estos aparatos no solamente vuelan a través del aire, sino que utilizan el aire para no caer a la tierra. Todo vehículo aéreo que vuela a través del aire es soportado y propulsado por medio del aire y también es retardado en su avance por el aire.

Existen dos fuerzas del aire: fuerzas “del aire inmóvil” (estático); y de las fuerzas “del aire móvil o en movimiento” (dinámico). La capacidad de la fuerza de sustentación “del aire inmóvil” ha sido conocida primero; esta fuerza ha sido utilizada por los globos aerostáticos durante cientos de años. Asombra ver un dirigible en vuelo con sus estructuras y máquinas levantando pesos enormes y moviéndose a través del aire. El mismo

efecto es bien conocido en menor escala con globos de juguete inflados con hidrógeno o helio.

Los dirigibles y globos aerostáticos son máquinas más “ligeros que el aire”, (Fig.1) por lo tanto son levantados principalmente por la flotabilidad o fuerza de empuje que es la fuerza ascensional estática o sustentación estática del aire.

Los aviones y helicópteros son máquinas más “pesadas que el aire”, Sin embargo, el poder de sustentación “del aire móvil o en movimiento”, sigue siendo un problema. Los dirigibles son levantados principalmente, por la fuerza ascensional estática del aire, pero menos de la décima o centésima parte del peso del avión es levantada por la fuerza ascensional dinámica o de sustentación dinámica. Un concepto real y claro es distinguir lo que el aire en movimiento puede hacer y lo que el aire inmóvil no puede hacer. La fuerza producida por el movimiento es decir la fuer-

za ascensional dinámica debe estar impresa tan claro y simple como la flotabilidad o fuerza ascensional estática.

La fuerza ascensional dinámica que mantiene en el aire un avión se origina en el ala cuando el avión, bajo la tracción de la hélice, avanza en el aire, es decir, recibe un viento relativo: la sustentación no es un fenómeno estático, si no dinámico. El vuelo dinámico está muy difundido entre los seres terrestres tales como los insectos, aves y murciélagos. El aire levanta pesos no porque el aire está en movimiento, sino porque el aire es movido; ¿Puesto en movimiento, por quién, cómo y por qué medios? :

a) ¿Quién es el que pone en movimiento el aire? Es el avión, un avión nunca se elevará por el aire, a menos que este aire sea primero enviado continuamente hacia abajo por el ala del avión.

b) ¿Cómo se pone en movimiento el aire? Simplemente el aire fresco, nuevo y en reposo, es alcanzado continuamente por las alas del avión; este aire es sacado de su estado de reposo y puesto en movimiento hacia abajo, de esa manera el ala contribuye que el avión sea levantado.

c) ¿Por qué medios pone el aire en movimiento? Mediante la hélice del avión que es el medio mecánico que da comienzo al movimiento del aire en reposo. La hélice tiene una forma particular y al mismo tiempo que gira, la hélice continuamente toma aire en reposo impulsando a éste en una corriente de circulación, semejante al aire enviado por un ventilador de oficina. El aire en reposo, en su reacción opuesta al cambio producido al pasar del estado de reposo al movimiento, produce un efecto que es medido y pesado al cual es llamado fuerza de empuje o fuerza de tracción.

También debemos considerar la existencia de fuerzas estáticas y dinámicas en un me-

dio líquido tal como el agua; las fuerzas que se origina en un esquí arrastrado por una lancha, un barco de transporte de pasajeros y carga que está en flotación permanente sobre la superficie del agua, y los submarinos que se desplazan dentro del agua. Por consiguiente sabemos que: los dirigibles y globos aerostáticos se sostienen en el aire por flotación, porque son aparatos que están llenos de gas más ligero que el aire, en efecto, el empuje del aire sobre ellos es mayor que su peso; es decir está soportado por “fuerzas aerostáticas”. Los barcos, yates y veleros flotan apoyados sobre el agua, porque hay equilibrio entre su peso y el empuje debido a la cantidad de agua que desaloja; es decir está soportado por las “fuerzas hidrostáticas”.

El esquí, cuando está en movimiento, puede decirse que está soportado por “**fuerzas hidrodinámicas**”. El avión puede ser sostenido en el aire solamente cuando está en movimiento, y puede decirse que está soportado por “**fuerzas aerodinámicas**”.

## 2. LA RESISTENCIA AERODINÁMICA

Una situación interesante es que pasamos nuestra vida en el fondo de un océano de aire, y por consiguiente, solos somos conscientes de su resistencia al movimiento en muy pocas oportunidades.

Todas las personas y los objetos tales como el paracaidista en caída, un esquiador acuático, un buceador, un velero, un yate, un barco, un cohete, un huracán, una roca en un arroyo agitado, todos tienen una cosa en común, que todas las personas y los objetos se mueven a través de un fluido (gas o líquido); o si no, el fluido pasa alrededor de las personas y los objetos. En cada escena, el objeto en movimiento experimenta alguna resistencia a su movimiento a través del fluido. Esta resistencia se llama arrastre.

Un fluido, tanto en reposo como en movi-

miento, exhibe una tensión interna llamada presión. Un cuerpo sumergido en un fluido en reposo o en movimiento, experimenta una fuerza de arrastre total; sobre cada elemento de la superficie del cuerpo el fluido adyacente ejerce en general una fuerza normal (presión) y una fuerza tangencial (fricción). Cada una de estas fuerzas tiene una componente en la dirección del flujo que se aproxima. El arrastre de fricción está siempre presente porque todos los fluidos tienen algo de viscosidad; muy importante, el arrastre de presión o de forma depende mucho de la forma del cuerpo. Ambos componentes es parte del arrastre de contorno.

Las propiedades mecánicas importantes en lo que se refiere al movimiento del fluido son: 1) La densidad  $\rho$  (que es una medida de la inercia del fluido), y 2) la viscosidad  $\mu$  (que es la resistencia friccional del fluido a la deformación). Un fluido viscoso, tanto líquido como gaseoso, siempre se adhiere a la superficie del cuerpo; es decir no hay movimiento relativo, o deslizamiento, en los lugares donde se ponen en contacto el cuerpo con el fluido.

Podemos hacer un resumen general de lo expuesto sobre la resistencia que experimenta un cuerpo cuando se mueve a través del aire a velocidad moderada o sea a velocidades muy por debajo de la velocidad de las ondas sonoras en el aire. La resistencia por rozamiento al avance es la componente de la resistencia del aire paralela a la dirección del movimiento y se compone de dos partes:

a) la originada porque el escurrimiento no se cierra completamente alrededor de la cola, sino que se separa para formar una estela (flujo desordenado).

b) la causada por la adhesión del aire a la superficie del cuerpo en movimiento, debido a la viscosidad, formando una capa límite.

La primera parte de resistencia está relacio-

nada con la forma del cuerpo y se denomina arrastre de presión o de forma, porque se origina por la diferencia de presión entre la proa y la cola. Puede reducirse o eliminarse casi enteramente, por medio de un perfilado cuidadoso de la cola de modo que el escurrimiento siga fielmente el contorno casi hasta el punto en que el cuerpo termina. Los dirigibles, o los peces, son conocidos en aerodinámica como cuerpo perfilado currentilíneo según las líneas de corriente, o cuerpos de perfil aerodinámico; significa simplemente un cuerpo que deja detrás de él solo una estela muy pequeña (Fig.2). Los cuerpos cuyas colas están cortadas con cantos vivos, tal como los proyectiles dejan detrás una gran estela desordenada, experimentando un alto arrastre de forma. Tales formas se denominan cuerpos no aerodinámicos. La segunda parte de resistencia, originada por el esfuerzo cortante en la "capa límite", se denomina fricción superficial o arrastre de fricción y puede reducirse, pero nunca eliminarse, aun haciendo muy lisa la superficie del cuerpo.

En la mayoría de los problemas de movimiento del fluido es, por supuesto, indistinto considerar:

a) un cuerpo en reposo o estacionario, al cual pasa una corriente de fluido o una gran masa de fluido que circula alrededor del cuerpo,

b) el cuerpo moviéndose a través de un fluido en reposo o en una gran masa de fluido en reposo; siempre que la velocidad relativa sea la misma en ambos casos.

Este cambio en el punto de vista del observador, de uno que está fijo al cuerpo a otro en el que está fijo al flujo de corriente, se llama Transformación Galileana, puede verse que es mucho más simple realizar experimentos sobre un modelo de avión en un Túnel de Viento, que hacerlo sobre un modelo de avión volando a través de aparatos de prueba. Las bases teóricas de este fenómeno están sustentadas en varios planteamientos físico-matemáticos.

## 2.1 LAS ECUACIONES DE NAVIER-STOKES

Las Ecuaciones de Navier-Stokes para fluidos en general fueron realizadas en primer lugar por un matemático francés Claude-Louis Navier (1785-1836), y por el físico y matemático irlandés George Gabriel Stokes (1819-1903). Describe el movimiento de los fluidos: gases y líquidos. La ecuación se obtiene a partir de la física básica empleando las leyes fundamentales: una es la Conservación de la Masa, que en nuestro caso dice que durante “el movimiento no se crea ni destruye fluido”, y la otra es la Segunda Ley de Newton, Ley de la Dinámica: según la cual “El producto del valor de la masa de una partícula fluida por su aceleración es proporcional a la magnitud de la fuerza externa que actúa sobre la partícula fluida y tiene la misma dirección y sentido de dicha fuerza”.

La primera ley nos conduce a lo que se conoce como Ecuación de Continuidad, que oficia como una especie de sensor de las fórmulas matemáticas, asegurando que en la expresión final no pueda aparecer nada que viole el principio de conservación de la masa. La segunda ley lleva a las que se conocen como Ecuaciones del Movimiento de Euler (en razón de haber sido este gran matemático suizo quien primero las enunció). De hecho relaciona el movimiento de una partícula del fluido con las fuerzas que actúan sobre ellas. Según ya hemos dicho, en realidad son las ecuaciones de Newton de la dinámica ordinaria. Así tenemos tres ecuaciones de Euler para fluidos ideales consiste en un miembro, que es la aceleración, conteniendo cuatro términos igualados al gradiente de presión y a las fuerzas exteriores.

Las Ecuaciones de Navier-Stokes se utilizan para el análisis de flujos compresibles

e incompresibles de fluidos newtonianos, son ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden no lineales, las que gobiernan el movimiento de los fluidos de viscosidad dinámica constante, densidad, presión, velocidad, y las fuerzas externas. Estas ecuaciones consisten de nueve términos en total, de modo que en las ecuaciones de Navier-Stokes tenemos que equilibrar cuatro tipos de fuerza: “Términos de Inercia o la Aceleración Total de una Partícula Fluida”. Este primer miembro corresponde a la aceleración del fluido, las que dependen de la densidad y de las variaciones de la velocidad en el espacio y en el tiempo. (Términos de Leonhard Euler, 1707-1783). Las que dependen de los gradientes de presión.

El segundo miembro son los “Términos de Viscosidad o Divergencia de Esfuerzos”. En este segundo miembro corresponde a los que dependen de las originadas por acciones externas, de la viscosidad y de las variaciones dinámicas de la velocidad en el espacio. (Términos de Navier-Stokes). Las originadas por acciones exteriores. El problema está en hallar las velocidades y presiones que logren el establecimiento del equilibrio y, al mismo tiempo, satisfagan la ecuación de continuidad.

Los términos introducidos por Euler aparecen únicamente debido a que el fluido tiene masa o densidad, mientras que los agregados por Navier y Stokes expresan el hecho de que un fluido está constituido por moléculas, o sea que tiene fricción interna, proporciona un modelo útil del flujo de turbulencias. Ambos “Términos de Inercia y de Viscosidad”, juntos describen todos los rasgos del movimiento de los fluidos reales.

Se utiliza para el análisis de fluidos viscosos y no viscosos. Estas ecuaciones proporcionan un modo realmente preciso de

calcular cómo los fluidos se mueven. Esto es una característica clave en innumerables problemas científicos y tecnológicos. Las ecuaciones de Navier-Stokes son útiles para modelar el clima, las corrientes oceánicas, el flujo de agua en las tuberías, el flujo sanguíneo; “el diseño de los aviones de pasajeros, transbordadores espaciales, o los más rápidos y maniobrables aviones de combate, porque no solo hace que estos vuelen de manera eficiente, sino que tienen que volar de manera estable y fiable. El diseño de automóviles, centrales eléctricas, el de los barcos, es decir que ha revolucionado el transporte”; el estudio de los movimientos de las estrellas dentro de la Galaxia. Las Ecuaciones de Navier-Stokes junto con la Ecuaciones de Maxwell pueden ser utilizados para modelar el flujo magneto hidrodinámico para sistemas de propulsión naval. Métodos computacionales para resolver ecuaciones, conocidos como mecánica de fluidos computacional o CFD (Computational Fluid Dynamics), son muy usados por científicos e Ingenieros para mejorar la tecnología en sus áreas.

## 2.2 ECUACIÓN DE BERNOULLI

Para una corriente estacionaria partiendo de la ecuación de Euler se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{1}{2}V_1^2 + \frac{1}{\rho}P_1 + g z_1 = \frac{1}{2}V_2^2 + \frac{1}{\rho} P_2 + g z_2 = C^{\text{te}} \quad (2.2.1)$$

Que es la Ecuación de Bernoulli, también conocida como el Teorema de Bernoulli en forma integral de la ecuación del movimiento de Euler, que se basa en que el flujo es permanente, sin rozamiento, (no viscoso), incompresible, con la gravedad como única fuerza interna que se cumple no solo a lo largo de una línea de corriente lo cual significa físicamente que es constante para todo el campo de flujo.

Una de las aplicaciones del Teorema

de Bernoulli es el túnel de viento o túnel aerodinámico que es una herramienta importante de la aerodinámica, es un instrumento de investigación desarrollada para ayudar en el estudio de los efectos del movimiento del aire alrededor de objetos sólidos. Con esta herramienta se simulan las condiciones que experimentará el objeto de la investigación en una situación real; tales como el desarrollo de los perfiles de las alas, la eficiencia de alas ranuradas, fuselajes, timones, tren de aterrizaje determinando los coeficientes de sustentación y arrastre de los diversos componentes de un avión, y por último la maqueta de un modelo reducido completo del avión. El túnel de viento es un Tubo Venturi en grande, es un tubo abierto convergente-divergente dirigido en el sentido de la corriente del fluido (Fig.3), que se diseña de acuerdo a las características de la investigación y desarrollo de los modelos reducidos o maquetas en estudio para determinados fines de aplicación civil o militar.

En un túnel de viento, se aplica el Principio de la Transformación Galileana que es lo mismo mover el avión y tener el aire fijo o mover el aire y tener el avión fijo, obteniéndose los mismos resultados. En ambos casos se crean las mismas presiones y fuerzas del aire. De acuerdo con lo anterior, se efectúa el “vuelo” del modelo en el túnel manteniendo fijo a éste haciendo circular el aire a través del mismo con velocidad uniforme, y las balanzas o los sensores electrónicos conectados a los computadores nos permiten medir las fuerzas del aire sobre el modelo, información de gran utilidad para los científicos e ingenieros de las diferentes áreas del conocimiento. Además se estudia los diversos fenómenos que se manifiestan cuando el aire se mueve alrededor de los objetos como aviones, naves espaciales, misiles, automóviles, edificios o puentes.

### 3. SIGNIFICADO FÍSICO DEL NUMERO DE REYNOLDS

#### 3.1 EL NÚMERO DE REYNOLDS

Osborne Reynolds (1842-1912), fue un ingeniero y físico irlandés que realizó importantes contribuciones en los campos de la hidrodinámica y la dinámica de fluidos. El objetivo del experimento es descubrir la naturaleza del escurrimiento en un tubo lleno de agua, al interior del tubo se introduce un tubo capilar muy delgado que porta un colorante al cual se inyecta al tubo lleno de agua que está fluyendo con una velocidad constante sin perturbaciones donde se inicia un escurrimiento lento por el tubo.

Osborne Reynolds demostró: (a) La existencia de dos tipos básicos de flujo laminar y turbulento. (b) El principio unificador subyacente que gobierna la transición de un tipo a otro, viene a ser la llave de la aerodinámica. Experimentalmente se ve que la transición no tiene lugar solo cuando la velocidad  $u$  del fluido excede un cierto valor en un conducto de diámetro fijo  $d$ , sino que también ocurre cuando la velocidad se mantiene constante y el diámetro se incrementa más allá de cierto valor; y finalmente, cuando el producto del diámetro por la velocidad se mantiene constante y la viscosidad cinemática  $\nu$  disminuye. Es decir que la transición del flujo laminar al turbulento depende solo del valor de la cantidad ahora llamada universalmente Número de Reynolds.

$$N_r = ud/\nu = \rho ud/\mu; \quad (\nu = \mu/\rho) \quad (3.1.1)$$

Donde  $\nu$  es la viscosidad cinemática o cinética que está en relación con la viscosidad dinámica o absoluta  $\mu$  (como medida del rozamiento interno), y la densidad del fluido  $\rho$  (como medida de la inercia).

El número de Reynolds es la cantidad

más importante de la aerodinámica, es una cantidad adimensional un número puro o abstracto. Veamos su significado físico.

Los ensayos aerodinámicos no se realizan casi nunca al ambiente natural, sino sobre modelos reducidos, es decir, en circunstancias que no son las que en el vuelo real se presentan. Un ejemplo lo aclara completamente: se trata de determinar cuál será el coeficiente de resistencia de un cuerpo fuselado de diámetro  $l_1$ , en una corriente de agua de velocidad  $v_1$ . Como no se dispone de un canal hidrodinámico, han de efectuarse las mediciones en el túnel aerodinámico mediante el modelo de cuerpo fuselado con que se cuenta, que tiene un diámetro  $l_2$ . ¿Cuáles son las condiciones que deberán cumplirse para que los resultados de los ensayos puedan ser transportados a la corriente de agua? La respuesta, evidentemente, es que en puntos correspondientes de los dos campos de escurrimiento las fuerzas actuantes en un elemento fluido deben guardar siempre la misma relación. Es decir que el espectro de la corriente alrededor del primer cuerpo sea semejante al del segundo cuerpo.

La 1ra. Condición que ha de cumplirse, es la de que ambos cuerpos fuselados sean geoméricamente semejantes.

La 2da. Condición que ha de cumplirse, que la condición de similitud de los fenómenos de corriente fluida y, por consiguiente, lo legítimo del transporte de los ensayos sobre el segundo modelo al primer modelo exige la igualdad de los dos Números de Reynolds de ambos cuerpos fuselados:

$$N_{R1} = N_{R2} \quad (3.1.2)$$

Las corrientes fluidas alrededor de dichos cuerpos fuselados han de ser semejan-

tes, deben tener la misma relación entre las tres fuerzas todas medidas para partículas fluidas correspondientes en ubicaciones geométricamente semejantes, guardan razones iguales, aun cuando sus magnitudes no son respectivamente iguales; estas son: inercia, rozamiento y presión, estas tres fuerzas están en equilibrio, a esto se le llama dinámicamente semejantes.

### 3.2 LA SEMEJANZA DINÁMICA ES LA BASE DE LA PRUEBA DE MODELOS

Ley de semejanza dinámica: "Igualdad en el número de Reynolds lleva a la igualdad del coeficiente de arrastre". El principio de semejanza dinámica es importante para los ingenieros aeronáuticos que diseñan aviones y cohetes, para los ingenieros mecánicos que diseñan sistemas de propulsión, para arquitectos navales que diseñan barcos, para ingenieros civiles que diseñan turbinas hidráulicas. En todos los campos de la actividad, el principio de semejanza dinámica da a los ingenieros una herramienta muy poderosa "la prueba de modelos". La semejanza dinámica no solo indica cómo diseñar la experimentación sobre un modelo para que sea significativo, sino que también dicen cómo se debe de tratar los datos para que el experimento sea aplicable al prototipo de tamaño real.

Una de la maravillas de nuestra época es el progreso del vuelo con motor durante los último cien años. Los túneles de viento, fuera de la industria aeronáutica, tienen una gran importancia porque sin ellos, es casi inconcebible que en la actualidad no se hubieran producido tipos de aviones superiores al de los años cuarenta del siglo pasado. Las pruebas en túneles de viento no son solo la comprobación del diseño completo; más bien son una parte integral del procedimiento del diseño y desarrollo. Cada rama de la

ingeniería en la que es importante la dinámica de los fluidos, ahora da por sentada la importancia de la prueba de modelos para su desarrollo posterior. La prueba de modelos reducidos sería inútil sin el principio de semejanza dinámica que nos dice cómo interpretar los datos sobre la prueba de modelos.

## 4. TEORÍA DE LA SUSTENTACION DEL ALA

### 4.1 TEORÍAS HISTÓRICAS DEL ASCENSO AERODINÁMICO

Sir Isaac Newton (1646-1727), Isaac Newton en 1726 formuló la primera teoría sobre la resistencia en el aire, la teoría del impacto, fue el primero en darse cuenta de que tanto el aire como el agua estaban sujetos a leyes similares y de que las fuerzas aerodinámicas dependía de la densidad y velocidad del fluido y de la forma y tamaño del objeto en movimiento. En base a estas ideas resultó una fórmula cuantitativa preparada para calcular el esfuerzo ascensional o de sustentación de una placa inclinada con respecto al viento relativo en movimiento en el aire. Implicaba considerar a los fluidos tanto aéreos como líquidos compuestos por corpúsculos individuales sin ningún tipo de interacción entre ellas, con cierto rebote elástico de estas partículas se aceptan como bolas individuales, al chocar contra un obstáculo hay una transferencia del momento lineal, cuya suma de todas las partículas es una fuerza ejercida sobre el objeto. Esta teoría subvalora enormemente la realidad. Esta es la célebre fórmula del seno cuadrado:  $R=KSV^2 \text{ sen}^2 \alpha$ , (Fig.4).

John William Strutt (1842-1919), Lord Rayleigh, en 1876, abogó por otra teoría de distribución de fluencia similar a la creada por una placa al deslizarse sobre el agua. La discrepancia entre estas dos teorías y de ambas con la realidad es tal que pue-

de apreciarse en la Fig.4. Es evidente que no podía intentarse la construcción de un aeroplano con ayuda de estas teorías.

Nicolái Joukovsky (1847-1921), Nicolái Joukovsky en 1907 advertiría la importancia de la placa ascensional en movimiento viscoso a través de un gran volumen de aire. Este paso fue probablemente el más importante de la historia de la aerodinámica, y para que se produjera hubo que esperar casi doscientos años.

## 4.2 SUSTENTACIÓN DINÁMICA

Para desarrollar el vuelo mecánico fue necesario adquirir conciencia de él y resolver tres problemas importantes.

El primero es el de suministrar la potencia adecuada sin que significara peso excesivo. La solución del problema de la potencia vino con la invención del motor de combustión interna; el motor es el que impulsa al avión a través del aire, comunicándole en cada momento la velocidad necesaria para conservar el estado de vuelo. El motor proporciona el trabajo obtenido de la energía del combustible y la hélice transforma ese trabajo en tracción.

El segundo es el diseño de las superficies de sustentación eficientes.

El tercero es el logro de la estabilidad en el vuelo. Que se verá más adelante.

La solución al segundo problema es el siguiente: vamos a considerar un vehículo aéreo; en todo vehículo aéreo actúan cuatro fuerzas: su peso  $W$  (Weight), la tracción aplicada  $T$  (Thrusts) y la resistencia del aire  $D$  (Drag), la sustentación  $L$  (Lift), las cuales pueden suponerse aplicadas al centro de gravedad  $G$  (Gravity). Si el movimiento es uniforme y rectilíneo horizontal, el equilibrio de las fuerzas está representado en la Fig.5. El mismo equilibrio existe también en el dirigible y en el

avión, cuando se supone que se mueve horizontalmente y, aun cuando el dirigible se sustenta de modo distinto que en el avión, se dice impropriamente que ambos vuelan, aunque esta afirmación se refiera solo exactamente al avión. Ahora, el peso  $W$  se opone y hace equilibrio la sustentación  $L$  (Lift). ¿Cómo se origina la sustentación dinámica?

La sustentación que mantiene en el aire a un avión se origina en el ala del avión, bajo la tracción de la hélice avanza en el aire, es decir, recibe un viento relativo: la sustentación no es un fenómeno estático, es una sustentación dinámica.

## 4.3 PERFILES AERODINÁMICOS

George Cayley (1773-1857), fue un ingeniero e inventor británico. Se dedicó al estudio de la locomoción aérea desde una perspectiva científica; llevó a cabo una notable serie de experimentos con aeromodelos, Cayley más que ningún otro hombre de su tiempo, comprendió realmente los requisitos esenciales del vuelo mecánico. Demostró que las superficies con curvatura son mejores que las planas para proporcionar sustentación. También comprendió la necesidad de hacer un avión estable e inventó el principio del diedro o la disposición de las alas en forma de V achatada para darle estabilidad lateral, y el concepto de utilizar una cola horizontal para darle estabilidad longitudinal. Los diseños de las primeras máquinas voladoras incluían muchas veces una cola vertical para el control direccional similar al timón de un barco. La verdadera función de la cola vertical como una contribución a la estabilidad no se reconoció hasta que se llevó cabo la obra de los Hnos. Wright; invento empleado aún en toda clase de aviones, desde el aeromodelo planeador hasta la máquina natural. Es posible que si en esa época se hubiera podido disponer del motor de combus-

tión interna liviano y potente, Cayley sería honrado hoy como el primer hombre que logró el vuelo mecánico.

Evidentemente, el factor que más influye en el desarrollo del ala es la relación de la fuerza de sustentación a la fuerza de resistencia por rozamiento, que debe ser tan grande como sea posible. Este valor puede duplicarse dando una leve curvatura a la superficie. La relación fuerza de sustentación a la fuerza de rozamiento ( $L/D$ ) más alta es aquella obtenida por el verdadero perfil de forma aerodinámica, con proa redondeada, parte superior lisa y curvada y la cola afilada. En la Fig.6 se tiene tres perfiles una placa inclinada, una placa curva inclinada, y un perfil aerodinámico que se muestra esquemáticamente las diferentes formas e indica la proporción de sus respectivas fuerzas de sustentación y de rozamiento.

#### 4.4 NOMENCLATURA DEL PERFIL AERODINÁMICO

Desde los primeros días de la aviación, el perfil aerodinámico ha sido estudiado intensamente en los laboratorios de movimiento del fluido de todo el mundo; por esto ha surgido una nomenclatura estándar, en la Fig.7 ilustra estos términos. Las dimensiones principales son: la envergadura  $b$  como la distancia entre los extremos del ala, y la cuerda  $c$  como la distancia media entre el borde delantero y el borde posterior, o sea borde de ataque y el borde de fuga.

El producto de la envergadura por la cuerda nos da la Superficie alar  $S$ , cuya área lo indicamos por  $S=bc$ . La relación de la envergadura a la cuerda media es llamada Alargamiento o Relación de aspecto  $A$ , así:  $A=b/c$  la relación de aspecto es la relación de la envergadura del ala a la cuerda media, o más propiamente, la relación del cuadrado de la envergadura al

área del ala:  $A= b^2/S$ ; universalmente se conoce que una relación de aspecto grande es favorable para una buena eficiencia aerodinámica. “Una relación de aspecto muy grande mantiene bajo el valor de la resistencia inducida”, es decir un ala larga y angosta con una relación de aspecto muy grande es más eficiente que otra ala con la misma superficie, pero de envergadura reducida. También se aplica para las superficies estabilizadoras. Se supondrá que el movimiento del aire es siempre perpendicular al borde de ataque, que el perfil aerodinámico y la dirección del movimiento forman un ángulo de incidencia o de ataque, que se indica siempre con la letra griega  $\alpha$  (alfa). Finalmente, se llama perfil a la sección transversal del cuerpo aerodinámico según la cuerda. Esta curva plana juega un importante papel en la teoría matemática del ala.

#### 4.5 COEFICIENTE DE SUSTENTACIÓN Y DE ARRASTRE

La fuerza de sustentación es una componente de la fuerza aerodinámica; para definir el coeficiente de sustentación podemos recurrir al método de análisis dimensional que fue utilizado por Lord Rayleigh para deducir lo que es, quizás el resultado aislado más importante de la aerodinámica: una fórmula universal para la fuerza que ejerce una corriente de aire sobre un cuerpo. Omitiendo las fuerzas gravitacionales (tales como peso y empuje de Arquímedes) que pueden ser tratadas separadamente, cualquier fuerza producida por el movimiento de un cuerpo de determinada forma y posición a través del aire debe depender de:

- a) propiedades del aire, como su densidad ( $\rho$ ) y su viscosidad dinámica ( $\mu$ ).
- b) La velocidad relativa del aire con respecto al cuerpo ( $u$ ).

c) El tamaño del cuerpo (d).

Conviniendo que el movimiento considerado se realice en un fluido incompresible, lo que significa para velocidades muy por debajo de la del sonido. Como la forma del cuerpo está fijada, cualquier dimensión lineal (d), tal como su longitud, radio o diámetro puede usarse como medida de su tamaño, y su elección es solo cuestión de conveniencia. Por ser extenso no se tocará el desarrollo del análisis dimensional para deducir los coeficientes. La fuerza aerodinámica se puede expresar en los factores que lo integran en forma adecuada:

$$\text{Fuerza Aerodinámica} = \frac{1}{2} \rho u^2 d^2 f(Re) \quad (4.5.1)$$

Donde  $f(Re)$  indica un número puro desconocido, que para un cuerpo de forma y posición dadas depende sólo del número de Reynolds del movimiento.

Si las fuerzas que nos interesan, son de sustentación y de arrastre o rozamiento podemos escribirlo así:

$$\text{Sustentación} = \frac{1}{2} \rho u^2 d^2 f(Re) = \frac{1}{2} \rho V^2 S c_L \quad (4.5.2)$$

$$\text{Arrastre} = \frac{1}{2} \rho u^2 d^2 f(Re) = \frac{1}{2} \rho V^2 S c_D$$

Siendo  $c_L$  el coeficiente de sustentación y  $c_D$  el coeficiente de arrastre que reemplaza lo que antes llamamos  $f(Re)$ , el conocimiento del valor del coeficiente de sustentación y de arrastre significa en efecto, que conocemos completamente la fuerza de sustentación y de arrastre. Donde  $u=V$  es la velocidad del aire sobre el ala (que es lo mismo, la velocidad del ala a través del aire, o se aplica la Transformación Galileana),  $\rho$  es la densidad del aire y  $d^2 = S$  es el área de la planta alar. Es normal describir el comportamiento de un ala en términos de los coeficientes de sustentación y arrastre independientes de la velocidad. (Para velocidades que no excedan de los 500 k.p.h.).

En los túneles aerodinámicos se determinan, para cada perfil, un gráfico de curvas separadas con las distintas curvas de los valores de los coeficientes de Sustentación  $c_L$ , Arrastre  $c_D$ , Rendimiento aerodinámico  $\beta = c_L/c_D = L/D$ , la posición del Centro de presión c.p. (en % de la cuerda a partir del borde de ataque hacia el borde de fuga), en función del ángulo de ataque  $\alpha$ .

## 5. RELACIÓN ENTRE FUERZA DE SUSTENTACIÓN Y CIRCULACIÓN

### 5.1 EL MOVIMIENTO IRROTACIONAL UNIFORME ALREDEDOR DE UN CILINDRO EN REPOSO

Se tiene un cuerpo sólido en reposo de forma simple tal como un cilindro circular sin rotación (sin girar sobre su eje) de gran longitud cuando está totalmente sumergido transversalmente a la dirección del flujo de una corriente uniforme de un fluido ideal, produce cambios locales de velocidad y presión.

La imagen de la corriente que da el esquema de distribución de las líneas de corriente es, al mismo tiempo, un mapa del campo de velocidad, que puede leerse con mucha facilidad con la sencilla regla de que: donde las líneas de corriente están muy juntas, la velocidad es alta, y donde están holgadamente separadas, el fluido se mueve con lentitud. En la Fig.8 se muestra la configuración de las líneas de corriente en cualquier sección transversal del cilindro. En este diagrama se puede observar que a una distancia suficientemente grande, corriente arriba del obstáculo, las líneas de corriente son rectas paralelas igualmente distanciadas entre sí. Esta disposición caracteriza a la corriente uniforme sin perturbación que al aproximarse al cilindro la corriente se divide simétricamente en los puntos A y C, el fluido se detiene junto al cuerpo. En

los puntos B y D, las líneas de corriente se juntan indicando que en esos puntos la corriente es rápida.

Teóricamente ocurre, como se indica en la Fig.8 que: a) Existen dos puntos de remanso A y C situados simétricamente en los extremos del diámetro horizontal. b) Las líneas de corriente se juntan en los puntos B y D y se separan en los puntos A y C. c) La distribución de velocidades y de las presiones es simétrica. Esto significa que aunque el fluido ejerce un empuje sobre la mitad anterior del cilindro ABD, debe ejercer también un empuje igual, pero de dirección opuesta, sobre la mitad posterior BCD. Como el fluido es ideal, es decir, no tiene fricción interna, estos empujes deben ser las únicas fuerzas ejercidas por la corriente sobre el cilindro y evidentemente se equilibran con exactitud, de suerte que, conforme a la hidrodinámica clásica un cilindro que se halla en reposo sumergido completamente en una corriente uniforme y permanente de un fluido ideal no experimenta resistencia alguna.

## 5.2 EL MOVIMIENTO IRROTACIONAL UNIFORME ALREDEDOR DE UN CILINDRO EN ROTACIÓN.

Introducimos una herramienta que es fundamental para el cálculo de la sustentación aerodinámica el concepto de circulación, fue usado independientemente por Frederick Lanchester (1868-1946) en Inglaterra, Wilhelm Kutta (1867-1944) en Alemania y Nicolái Joukovsky (1847-1921) en Rusia, para crear un avance en la teoría de la sustentación aerodinámica.

### El concepto de Circulación

Tenemos un cilindro circular y de gran longitud, supongamos ahora que hacemos girar nuestro cilindro sobre su eje sin desplazarse a una velocidad constante

en un fluido en reposo. El fluido se adhiere en las paredes del cilindro y las capas más alejadas son arrastradas en esta rotación, las líneas de corriente originado por la rotación del cilindro es irrotacional, que en este caso las líneas de corriente son curvas cerradas, que obviamente constituye una familia de circunferencias concéntricas, y que a lo largo de cualquiera de ellas la velocidad se mantiene constante, mientras que la velocidad varía en proporción inversa a la distancia al centro (Fig.9). Como no podemos usar la velocidad, que depende de la distancia al centro del cilindro, pero podemos hacer uso del hecho de que todas las velocidades siguen una ley definida.

Si  $r$  es la distancia al centro del cilindro y  $V_r = \omega r$ , es la velocidad a esta distancia, podemos expresarla así:  $V_r = \Gamma / 2\pi r$  donde  $\Gamma$  es la constante de proporcionalidad y decimos que es la circulación, que es igual al producto de la longitud de la circunferencia  $2\pi r$  por la velocidad  $V_r$ ; como  $V_r$  es inversamente proporcional a  $r$ , es evidente que  $\Gamma = \omega r \cdot 2\pi r = 2\pi r^2 \omega$  tiene el mismo valor para todos los círculos concéntricos, entonces el producto de la velocidad por la longitud de una curva cerrada nos proporciona una cantidad que caracteriza el movimiento. Esta es la interpretación física

$$\Gamma = \omega r \cdot 2\pi r = 2\pi r^2 \omega \quad (5.2.1)$$

### El concepto de Vorticidad

Es importante la interpretación física respecto a la Fig.9, vemos que no hay nada que impida este movimiento independientemente del cilindro simple sólido, excepto en el centro pero si retiramos el cilindro sólido la velocidad tiende a crecer sin límite  $V_r \rightarrow \infty$ , al aproximarnos al punto para el cual  $r \rightarrow 0$  hay un punto singular, que en hidrodinámica es una línea de vórtice de intensidad  $\Gamma$ , perpendicular al pla-

no del movimiento que pasa por el punto  $r=0$ , y  $\Gamma$  vale cero para toda curva que no encierra un centro de vórtice. Este es un caso particular de un importante teorema general: "La circulación a lo largo de una curva cerrada es igual a la suma de las intensidades de los vórtices contenidos en ella".

Esto conduce a un resultado inmediato que si el flujo es irrotacional por todas partes dentro del contorno de integración entonces  $\Gamma \neq 0$ ; ( $\nabla \times V = 2\omega \neq 0$  es el vórtice sobre cualquier superficie limitada por curva C). Una relación resultante se consigue permitiendo que la curva C disminuya hacia un tamaño infinitesimal, y denotando la circulación alrededor de esta curva infinitesimalmente pequeña por  $d\Gamma$ .

Entonces en el límite como C llega a ser infinitamente pequeña, tomamos un área infinitesimal y formamos la razón:

$$d\Gamma/dS = 2\omega \quad (5.2.2)$$

Donde dS es el área infinitesimal encerrada por la curva infinitesimal C. Refiriendo a la Fig.9, ecuación (5.2.2) establece que en el punto P en un flujo, la componente de la vorticidad normal a dS es igual al negativo de la "circulación por unidad de área" donde la circulación es tomada alrededor del contorno de dS. Matemáticamente definimos la vorticidad del movimiento en un punto dado como el valor límite de esta relación cuando el área tiende a cero. Es así como la vorticidad mide la intensidad local de rotación en el movimiento del fluido, mientras que la circulación indica la cantidad total de rotación en una región finita del fluido, tal como el aire en la proximidad del ala del avión.

La Circulación está también relacionada con la Vorticidad tal como sigue, ecuación (5.2.2) una superficie abierta limitada por

una curva cerrada C, se asume que la superficie está en un campo de flujo y la velocidad en el punto P es V, donde P es cualquier punto sobre una superficie (incluyendo cualquier punto sobre la curva C).

Los vórtices son regiones de rotación concentrada que componen la mayor parte de la estela detrás de un modelo simulado o no aerodinámico. La naturaleza nos proporciona abundantes ejemplos de regiones de rotación concentrada bien definidas, algunas veces en gran escala, como el ciclón tropical o el remolino de viento que puede alcanzar una fuerza en gran escala y otras veces en diminuta escala como el pequeño remolino que se forma en el conducto de desagüe de la bañera. Un anillo de humo es un movimiento vorticoso en una curva cerrada; los hoyuelos que aparecen en la superficie de un arroyo que se escurre sobre un lecho de piedras, señalan la terminación de los vórtices que son arrastrados corriente abajo. La magnitud o intensidad de un vórtice se mide por el valor de la circulación y su alrededor que permanece invariable en toda su longitud. Ahora sabemos que la vorticidad puede ser generada por acción de la viscosidad. Un cuerpo no aerodinámico deja detrás de sí un sinnúmero de zonas vorticosas, por lo general restos desintegrados de su capa límite. La iniciación y el lanzamiento al aire de esta familia de pequeños remolinos significan un gasto de energía que debe ser extraída del movimiento del cuerpo. El rozamiento a velocidades moderadas es causado esencialmente por la vorticidad en la estela, y por consiguiente, en última instancia, por la viscosidad.

### 5.3 TEOREMA DE KUTTA-JOUKOVSKY

El teorema es un resultado de la teoría de los fluidos ideales; no hace mención de la viscosidad, y se refiere solo a una

fuerza perpendicular a la dirección del movimiento. Por consiguiente, no tiene conexión con el rozamiento, es decir la fuerza de la dirección del movimiento, que tratándose de fluidos no viscosos debe ser nula. Este teorema es uno de los grandes triunfos de la teoría de los fluidos ideales en aerodinámica; en este caso la omisión de la viscosidad no afecta el resultado como lo haría en el problema de la resistencia por rozamiento. La fuerza de sustentación de un cilindro circular en rotación no está determinada solo por la velocidad del viento sino que depende también de su velocidad de rotación, que puede tomar el valor que deseemos. Un cilindro circular que gira alrededor de su eje puede considerarse como un cuerpo aerodinámico tosco pero el ala produce una sustentación mucho más eficiente sin movimiento mecánico de sus partes; esto es debido a su forma peculiar, especialmente a su cola afilada. El primer paso en la evolución de la teoría racional de los cuerpos aerodinámicos es el paso del cilindro circular en rotación al cilindro con sección transversal análoga al perfil de un ala. (proa redondeada y cola afilada) sin rotación.

El principio de superposición de flujos establece que un flujo (o movimiento de un fluido) complejo puede componerse por la superposición o adición de varios flujos sencillos. Sea el primero un flujo rectilíneo y uniforme con una velocidad  $V$ . En este caso la circulación será nula el diámetro de la sección del cilindro se encuentra en la dirección de la corriente, para cada punto de la circunferencia por encima y por debajo del diámetro, existirá puntos simétricos siendo las velocidades tangenciales:  $V_t = 2V \sin \theta$  iguales y direcciones también simétricas respecto al mismo diámetro. Sea el segundo un flujo circulatorio con líneas de corriente circulares (torbellino). En este caso, existirá una cir-

culación  $\Gamma$ , pero no habrá flujo rectilíneo. Sea el tercero la composición de los dos flujos que nos da como consecuencia que el flujo resultante tenga una velocidad  $V$  y una circulación  $\Gamma$ . Mediante el cálculo de la función potencial y la función corriente, para los casos de corriente plana paralela y de torbellino, se puede combinar ambas funciones y calcular la fuerza de sustentación  $L$  por unidad de longitud, combinando la suma de las dos velocidades del flujo rectilíneo y el flujo circulatorio y aplicando el Teorema de Bernoulli tenemos lo siguiente:

$$V_t = 2V \sin \theta + \Gamma / 2\pi r_0 \quad (5.3.1)$$

$$\frac{1}{2} \rho V_1^2 + \rho P_1 + \rho g z_1 = \frac{1}{2} \rho V_2^2 + \rho P_2 + \rho g z_2$$

De las ecuaciones (5.3.1) obtenemos lo siguiente: "que la sustentación es igual al producto de la circulación del torbellino, por la velocidad del flujo uniforme en el infinito, por la densidad del aire y por la longitud del cilindro (o del torbellino) considerada". Por unidad de longitud del cilindro inmerso en una corriente uniforme se tendrá:

$$L = \rho V \Gamma \quad (5.3.2)$$

Este es el Teorema Kutta-Joukovsky (Fig.10). Donde  $\Gamma$  es la circulación total alrededor del cilindro. La dirección de la sustentación  $L$  se obtiene girando  $90^\circ$  la dirección de la corriente incidente, en el sentido opuesto a la circulación. Hemos visto que cuando alrededor de un cilindro de base circular se sobreponen dos flujos, uno rectilíneo y uniforme y otro circulatorio, se produce una sustentación. En la práctica, una de las formas de conseguir la coexistencia de esos dos flujos, consiste en hacer girar un cilindro alrededor de su eje, en el seno de una corriente uniforme de fluido, de dirección perpendicular al eje del cilindro. El cilindro por viscosidad, imprime movimiento de rotación a los filetes fluidos que lo rodean, y las velocidades tangenciales desarrolladas,

al componerse con la velocidad uniforme de la corriente, engendran una disimetría que produce una resultante general, la cual da lugar, a su vez a una sustentación y un arrastre.

Heinrich Gustav Magnus (1802-1870), fue un físico y químico alemán. Magnus en 1852, fue el primero en indicar la existencia de dicha fuerza de sustentación, por lo cual el fenómeno se conoce con el nombre de “Efecto Magnus” esto se produce, por ejemplo en las pelotas de tenis, de golf y se aplica en el deporte del fútbol.

#### 5.4 TEORÍA DE JOUKOVSKY DEL CUERPO AERODINÁMICO

Por ahora no prestaremos atención a lo que ocurre en los extremos del ala, sino solo el escurrimiento en la parte media de las alas de gran envergadura. Matemáticamente, esto significa que consideraremos al ala como un cilindro de longitud infinita y sección transversal peculiar, y al escurrimiento como bidimensional. El cuerpo aerodinámico se divide en dos partes: a) El problema geométrico de encontrar la configuración del escurrimiento alrededor del perfil del cuerpo. b) El problema dinámico de determinar la fuerza de sustentación (que significa, como hemos visto determinar la circulación alrededor del perfil).

El problema geométrico es la de encontrar la configuración del escurrimiento alrededor de un cuerpo de forma dada, en un viento uniforme, es difícil, a menos que la sección transversal del cuerpo sea una curva simple, tal como un círculo. Joukovsky desarrolla sus perfiles a partir de un círculo valiéndose de un procedimiento matemático que dá al mismo tiempo, la nueva configuración del escurrimiento. El método usado por Joukovsky se basa en lo que los matemáticos llaman “Transformación Conforme”, que, en esencia es el

mismo problema de la confección de un mapa plano de la superficie de la tierra. Joukovsky descubrió una simple fórmula matemática en base de la variable compleja que tiene las propiedades de cómo transformar un círculo en una forma aerodinámica, transformándose las líneas de corriente del escurrimiento alrededor del círculo en las del cuerpo aerodinámico, dejando invariable el escurrimiento en puntos muy alejados del cuerpo. La figura 11 muestra un ejemplo de estas transformaciones.

El problema dinámico fue resuelto mediante una hipótesis. En el perfil aerodinámico de Joukovsky la cola forma lo que los matemáticos llaman un punto cuspidal, es decir, una punta afilada en la que las ramas superior e inferior del perfil tienen una tangente en común. En general, un punto de inflexión lleva implícita una discontinuidad en el movimiento, pero Joukovsky mostró que siempre existe una configuración del escurrimiento para lo cual el aire abandona la cola sin discontinuidad. El ala en vuelo la circulación toma el valor que corresponde a esta configuración del escurrimiento.

## 6. CONCLUSIONES

Hemos visto varios principios físicos de cómo se generan la fuerza de sustentación. Cada una de las siguientes afirmaciones es correcta:

El ala produce sustentación debido a que está volando con un ángulo de ataque.

El ala produce sustentación debido a la circulación.

El ala produce sustentación debido al principio de Bernoulli.

El ala produce sustentación debido a la ley de Newton de acción y reacción.

En todo esto hay un solo proceso de produc-

ción de sustentación. Todas las afirmaciones mencionadas se concentran en diferentes aspectos de este proceso. El ala produce circulación en proporción al ángulo de ataque y de su velocidad. Esta circulación significa que el aire que se mueve por el extradós se mueve más rápido. Más allá del borde de ataque esta velocidad mayor va acompañada de una disminución de presión conforme al principio de Bernoulli. El ala empuja el aire hacia abajo y la disminución de la presión sobre el ala empuja el ala hacia arriba, todo de acuerdo con las leyes de Newton.

Es cierto que entender cómo vuela un avión no es fácil, no se basa en un principio tan simple como el vuelo de los globos aerostáticos, esta es la causa de que nadie se ha planteado un estudio riguroso del tema en los temarios de física general, cosa que si ocurre con los globos aerostáticos.

Por otra parte el análisis cualitativo de los fenómenos del vuelo (sustentación, velocidad, pérdida, efecto suelo, etc.) que es lo que interesa al piloto, puede ser abordado con ayuda de la explicación de la sustentación como variación de la cantidad de movimiento del fluido. Por lo tanto hay muchas explicaciones complejas, y no es nada raro que aparezcan preconceptos falsos.

Es difícil abordar tareas de divulgación científica que sean atrayentes para el público, aparte de la relatividad o la mecánica cuántica. Por lo tanto ¿quién se atrevería a realizar un libro de divulgación sobre el tema de los fluidos?

Se puede abordar el estudio de la aerodinámica por medio de experimentos, realizados con ayuda de materiales sencillos, y con abundante material de imágenes fotográficas y dibujos relacionados en los que se muestren los fenómenos físicos asociados al vuelo de un avión.

## BIBLIOGRAFÍA

1. ALLEN, JOHN E., **Aerodinámica**, Barcelona, Editorial Labor, S.A., 1969.
2. ANDERSON, J., **The Airplane. A History of its Technology**, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Reston VA (USA), (2002).
3. E.L. HOUGHTON, P.W. CARPENTER, **Aerodynamics for Engineering Students**, B.H. (USA), 2002.
4. KARLSON, P., **El hombre vuela, Historia y técnica del vuelo**, Barcelona, Editorial Labor S.A., 1940.
5. MUNK M, Max, **Aerodinámica Simple**. Buenos Aires, 1942.
6. ORDOÑEZ ROMERO-ROBLEDO, Carlos, **Aerodinámica**, UTEHA, México, 1961.
7. SUTTON, O. G., **The Science of Flight**, Penguin Books, London, 1949.

## Figuras



Fig. 1

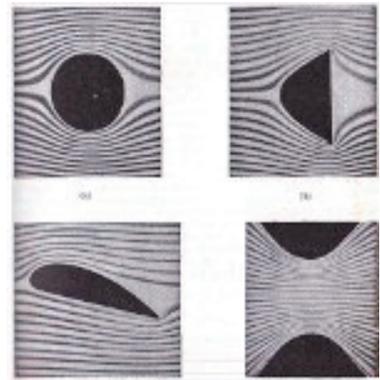


Fig. 2

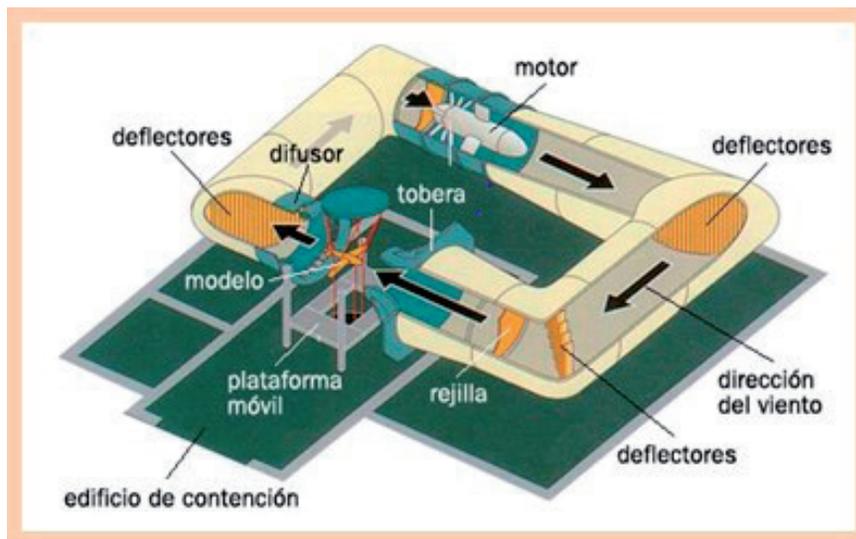


Fig. 3

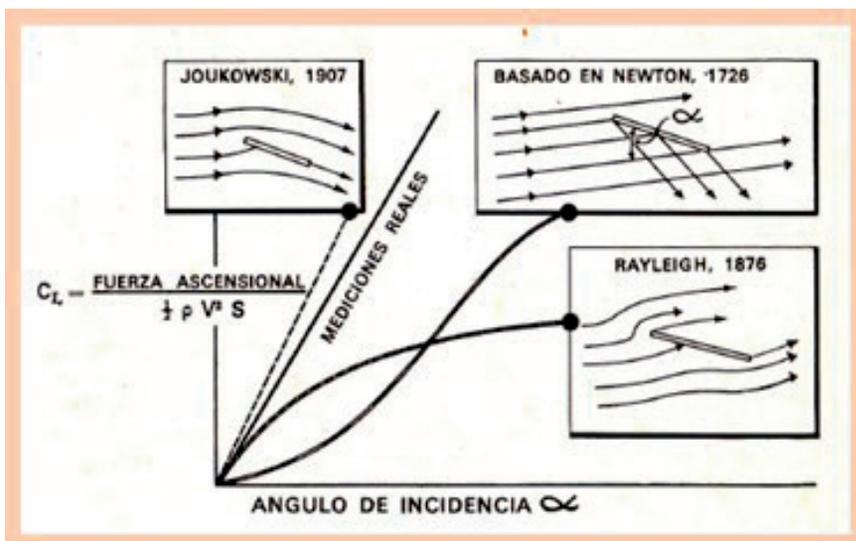


Fig. 4

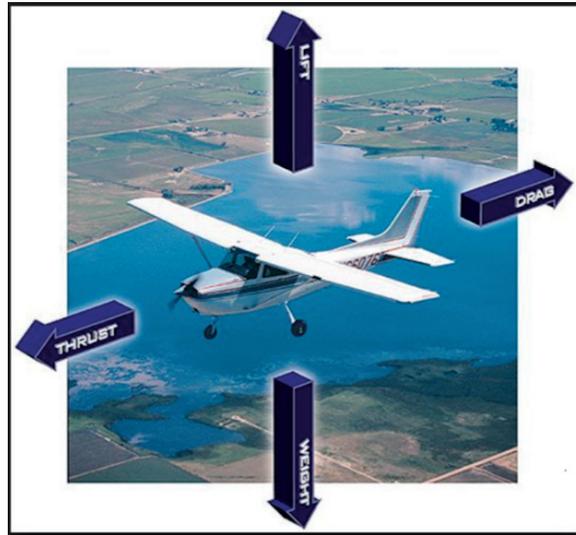


Fig. 5

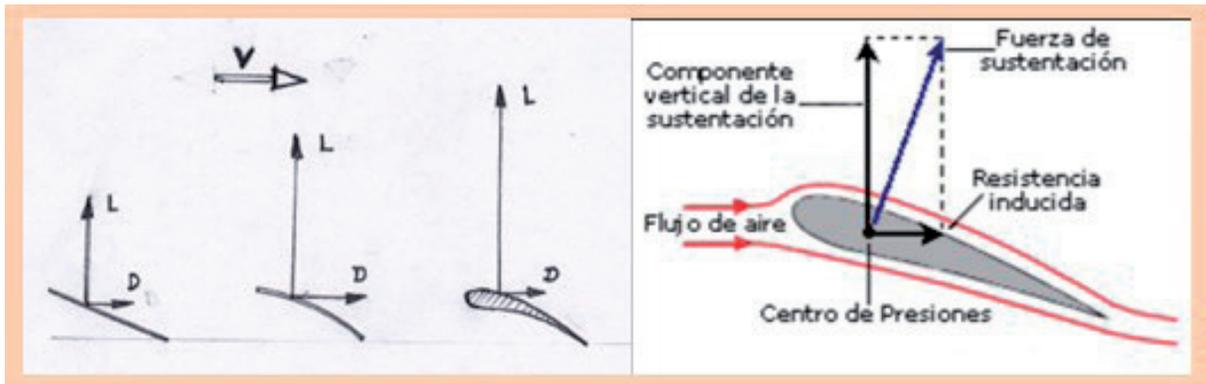


Fig. 6

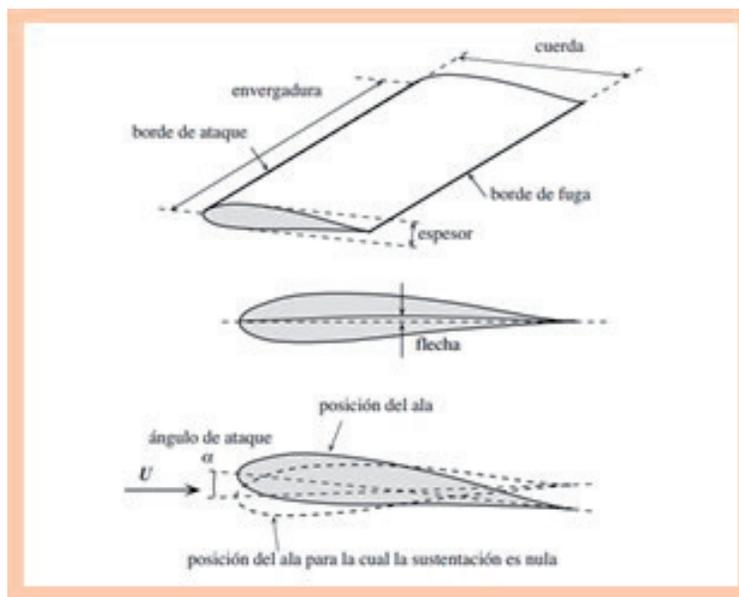


Fig. 7

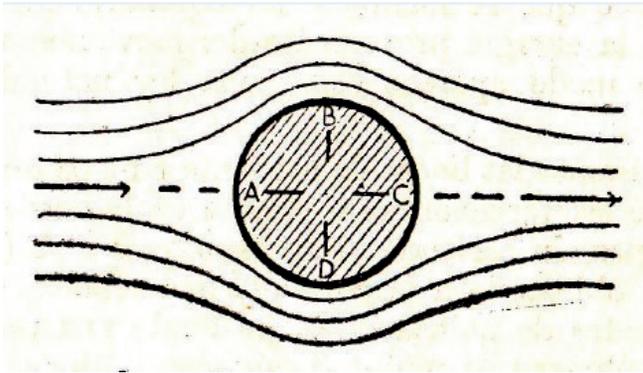


Fig. 8

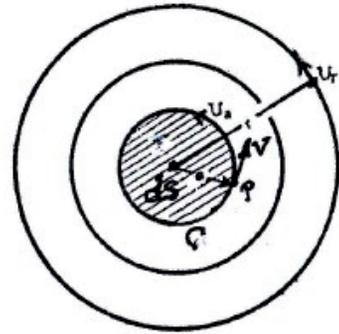


Fig. 9

**Kutta-Joukowski Lift Theorem for a Cylinder:**  
 Lift per unit length of a cylinder acts perpendicular to the velocity ( $V$  in ft/sec) and is given by:  
 $L = \rho G V$  (lbs/ft)

*Imperial Units*

$\rho$  = gas density (slugs/cu ft)  
 $G$  = vortex strength (sq ft/sec)  
 $G = 2 \pi b V_r$

$s$  = spin (revs/sec)  
 $b$  = radius of cylinder (ft)  
 $V_r$  = rotational speed (ft/sec)  
 $V_r = 2 \pi b s$

Fig.10

$z = x + iy$

$A = z + \frac{1}{z}$

$A = B + iC$

Rotating Cylinder      Airfoil

Use **complex variables** to map from one geometry to another

Fig. 11